1.

(1) $\alpha < \beta$ を満たす実数 $\alpha,\ \beta$ に対して、$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\ dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を示せ。

(2) 放物線 P を $y=-x^2+2x+4$ で定める。点 (p,q) が直線 $y=-2x+1$ の上を動くとき $y=(x-p)^2+q$ で定める放物線 Q が P と共有点をもつような p の値を求めよ。

(3) p が (2) で求めた範囲を動くとき、P と Q で囲まれた図形の面積の最大値を求めよ。

（07 お茶の水大）

(1)

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta (x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\alpha+\beta}{2}x^2 + \alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2) + \alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{(2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)$$

$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)

点 (p,q) が直線 $y=-2x+1$ の上を動くので

$q=-2p+1$

よって放物線 Q は

$y=x^2-2px+p^2-2p+1$

これが放物線 P と共有点をもつためには

$-x^2+2x+4=x^2-2px+p^2-2p+1$ が実数解をもてばよい。

$2x^2+(-2p-2)x+p^2-2p-3=0$

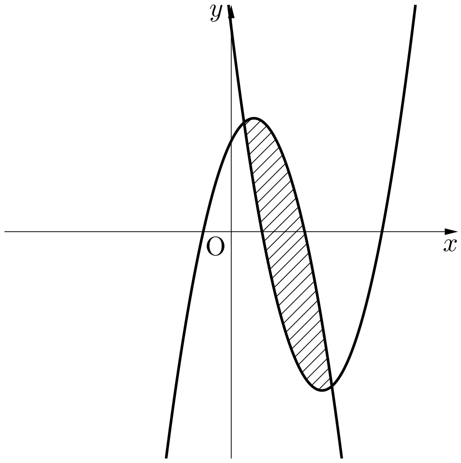
$$\frac{D}{4}=(p+1)^2-2(p^2-2p-3) \geqq 0$$

$-p^2+6p+7 \geqq 0$

$p^2-6p-7 \leqq 0$

$\boxed{-1 \leqq p \leqq 7}$

(3)



P と Q で囲まれた図形の面積を $f(p)$ とする。

P と Q の共有点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とする。

$f(p) = \displaystyle\int_\alpha^\beta (-2x^2+(2p+2)x-p^2+2p+3)\ dx$

$= -\dfrac{-2}{6}(\beta-\alpha)^3$

$= \dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$

(2) より α, β は $2x^2+(-2p-2)x+p^2-2p-3=0$ の解なので

$\beta-\alpha = \sqrt{(p+1)^2-2(p^2-2p-3)}$

$= \sqrt{-p^2+6p+7}$

$f(p)$ が最大になるのは $\beta-\alpha$ が最大になるときなので、$g(p)=\beta-\alpha$ とすると

$g(p)=\sqrt{-p^2+6p+7}$

$=\sqrt{-(p-3)^2+16}$

となるので、$-1 \leqq p \leqq 7$ の範囲で、$p=3$ のときに $g(p)$ が最大値 4 をとる。

このとき、$f(p)=\dfrac{64}{3}$ である。

以上より、P と Q で囲まれた図形の面積の最大値は

$\boxed{\dfrac{64}{3}\ (p=3)}$ である。